

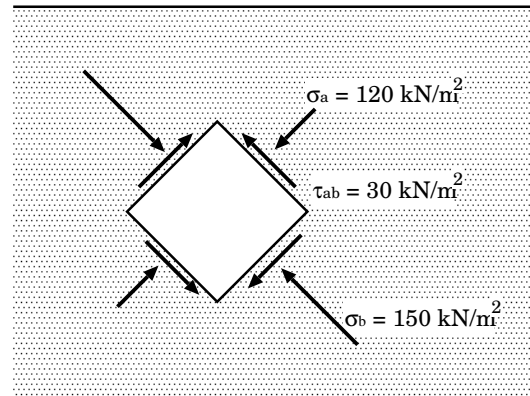
2009年度 地盤工学基礎演習課題

[2009.11.30 出題]

問題

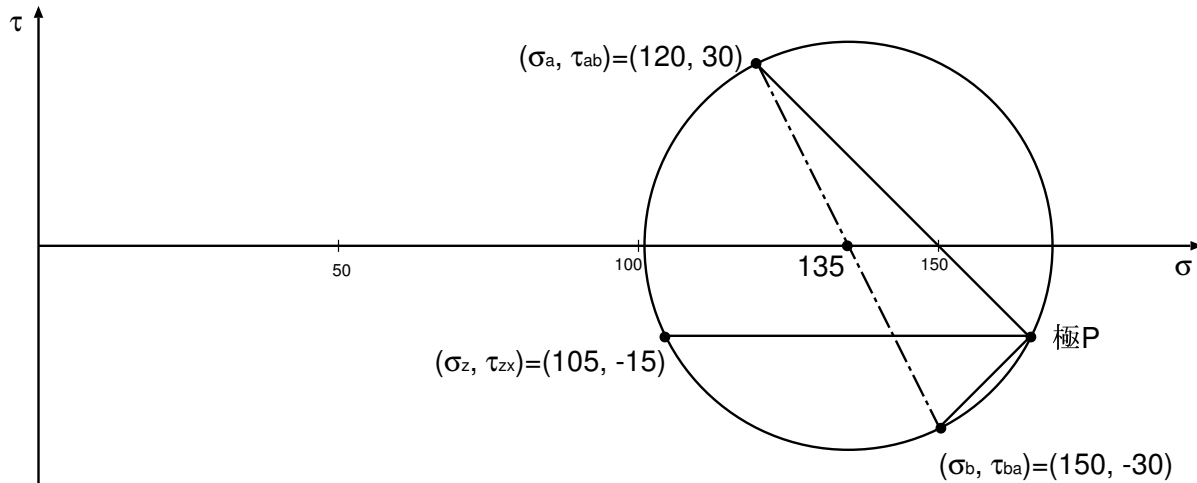
地盤内のある点において、水平面から 45° 傾いた面の応力状態が右図であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) この応力状態のモール円を描き、極 P を表示せよ。
- (2) モール円の中心座標と半径を求めよ。
- (3) 水平面に作用する垂直応力 σ_z とせん断応力 τ_{zx} を求め、これに対応するモール円上の点を示せ。



解答例

(1) せん断応力については、a 面では反時計回りなので正の値、b 面では時計回りで負の値となる。すなわち、 $(120, 30)$ と $(150, -30)$ を結ぶ線分を直径とする円を描けば良い。次に、座標 $(120, 30)$ から a 面と平行に引いた直線、または $(150, -30)$ から b 面と平行に引いた直線が円と交わる点が極 P となる。(なお a 面とは、 σ_a が作用する面のことである。)



(2) モール円の中心 σ_m の値は、

$$\sigma_m = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} = \frac{120 + 150}{2} = 135 \quad (\text{kN/m}^2)$$

したがって中心座標は、 $(135, 0)$ である。

モール円の半径は、

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_{ab}^2} = \sqrt{\left(\frac{120 - 150}{2}\right)^2 + 30^2} = 33.5 \quad (\text{kN/m}^2)$$

(3) 水平面は、b面を $\alpha = 45^\circ$ (時計回り) 回転させた面であるので、

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{\sigma_b + \sigma_a}{2} + \frac{\sigma_b - \sigma_a}{2} \cos 2\alpha + \tau_{ba} \sin 2\alpha \\ &= \frac{150 + 120}{2} + \frac{150 - 120}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + (-30) \times \sin(2 \times 45^\circ) \\ &= 105 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -\frac{\sigma_b - \sigma_a}{2} \sin 2\alpha + \tau_{ba} \cos 2\alpha \\ &= -\frac{150 - 120}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + (-30) \times \cos(2 \times 45^\circ) \\ &= -15 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

モール円では、極Pから求めたい面と平行な直線、すなわち水平な直線を引いて、円と交差する点が、水平面に作用する応力になる。

補足

(3)の問題を、テンソルによる座標変換で求めてみよう。

図の面と平行する a-b 座標系を設定し、応力テンソルで表示すると、

$$\begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{ab} \\ \tau_{ba} & \sigma_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -30 \\ -30 & 150 \end{bmatrix}$$

なおせん断応力は、座標系と応力の作用方向を考慮すると、ここでは負の値になる。また、座標変換マトリックスは、回転角 $\alpha = 45^\circ$ より、

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

したがって、座標系を鉛直面-水平面にあわせた場合のテンソルは以下になる。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{ab} \\ \tau_{ba} & \sigma_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & -30 \\ -30 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 165 & -15 \\ -15 & 105 \end{bmatrix}\end{aligned}$$