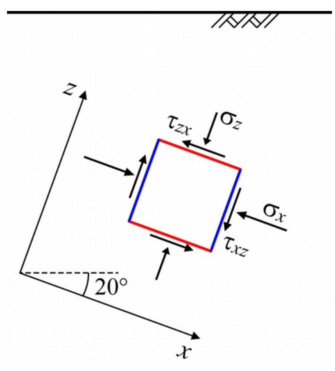
2015 年度　地盤工学基礎 演習問題　[2015.12.2 出題]

問題

右図のように，水平面・鉛直面に対して時計回りに α=20°回転した座標系の要素に作用する応力が既知であり，その値（絶対値）は以下である。(1)～(4)の問いに答えよ。

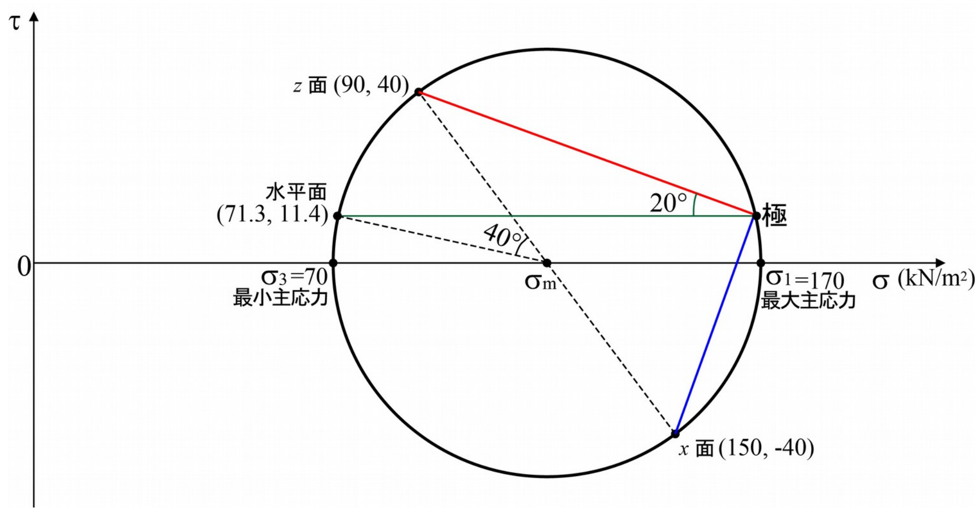
$$\sigma_x = 150 \ \ \mathrm{kN/m^2} \quad \sigma_z = 90 \ \ \mathrm{kN/m^2} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 40 \ \ \mathrm{kN/m^2}$$



(1) 図の応力状態をモール円で表わせ。
(2) モール円の極を(1)の円上に示せ。
(3) 最大主応力，最小主応力の値を求めよ。
(4) 水平面に作用する垂直応力とせん断応力の値を求め，極を利用してモール円上にその応力点を示せ。（ヒント：反時計回りなので，α= -20°で計算）

解答例

(1) x 面に作用するせん断応力は時計回りで負の値となるので，(150, -40) にプロット
z 面に作用するせん断応力は反時計回りで正の値となるので，(90, -40) にプロット



※せん断応力の符号が逆の解答が多く見られた。「反時計回りの応力が正」を忘れないこと

(2) (90, -40) の点を通り x 軸と平行な直線，または，
(150, -40) の点を通り z 軸と平行な直線がそれぞれ円と交差する点が極となる。

(3)

モール円の中心： $\sigma_m = \dfrac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \dfrac{150+90}{2} = 120 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$

モール円の半径： $\tau_m = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{150-90}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$

より，

$$\sigma_1 = \sigma_m + \tau_m = 120+50 = 170 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

$$\sigma_3 = \sigma_m - \tau_m = 120-50 = 70 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

(4) z 面を α=-20°回転させた面が水平面なので，その作用応力は,

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_z+\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_z-\sigma_x}{2}\cos 2\alpha+\tau_{zx}\sin 2\alpha$$
$$=\frac{90+150}{2}+\frac{90-150}{2}\times\cos[2\times(-20)]+40\times\sin[2\times(-20)]=71.3 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\sin 2\alpha+\tau_{zx}\cos 2\alpha$$
$$=\frac{90-150}{2}\times\sin[2\times(-20)]+40\times\cos[2\times(-20)]=11.4 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

極から水平線を引いて，円と交差した点が上記の応力となる。

補足

(4) 応力テンソルの座標変換を利用した解法

応力テンソル： $\mathbf{s}=\begin{pmatrix}150 & 40\\ 40 & 90\end{pmatrix}$

変換行列： $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos(-20) & -\sin(-20)\\ \sin(-20) & \cos(-20)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 20 & \sin 20\\ -\sin 20 & \cos 20\end{pmatrix}$

図の座標系を反時計回りに 20°回転させた X-Z 座標系の応力テンソルは,

$$\mathbf{S}=\mathbf{AsA}^\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\cos 20 & \sin 20\\ -\sin 20 & \cos 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}150 & 40\\ 40 & 90\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 20 & -\sin 20\\ \sin 20 & \cos 20\end{pmatrix}$$

各要素を計算すると,

$$\sigma_X=150\cos^2 20+90\sin^2 20+2\times 40\cos 20\sin 20=168.7 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

$$\sigma_Z=150\sin^2 20+90\cos^2 20-2\times 40\cos 20\sin 20=71.3 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

$$\tau_{XZ}=\tau_{ZX}=-150\cos 20\sin 20+90\cos 20\sin 20+40(\cos^2 20-\sin^2 20)=11.4 \ \ (\mathrm{kN/m^2})$$

水平面（Z 面）の応力値は，σ_Z=71.3 kN/m^2，τ_{ZX}=11.4 kN/m^2

(4) 行列の一次変換を援用し,

モール円の中心に対し，(σ_z, τ_{zx}) の点を反時計回りに 2α=40°回転させて求める解法

直行座標系の点(x, y)を，原点周りに角 θ 回転（反時計回り）させる一次変換は,

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

点(x, y)を，(a, b)点周りに角 θ 回転させる一次変換は，回転中心の移動を併用し,

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

したがって，点(90, 40)をモール円中心(120, 0) 周りに 40°回転させた水平面の応力は,

$$\begin{pmatrix}\sigma_\alpha\\ \tau_\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 40 & -\sin 40\\ \sin 40 & \cos 40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}90-120\\ 40-0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}120\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-30\cos 40-40\sin 40+120\\ -30\sin 40+40\cos 40+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}71.3\\ 11.4\end{pmatrix}$$