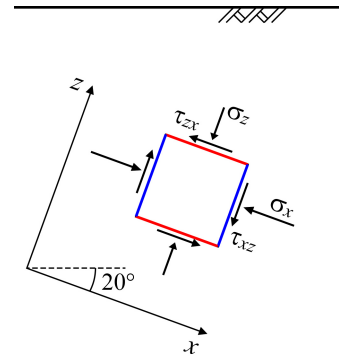


2016年度 地盤工学基礎 演習問題 [2016.11.28 出題]

問題

右図のように、水平面・鉛直面に対して時計回りに $\alpha=20^\circ$ 回転した座標系の要素に作用する応力が既知であり、その値（絶対値）は以下である。(1)~(4)の問いに答えよ。

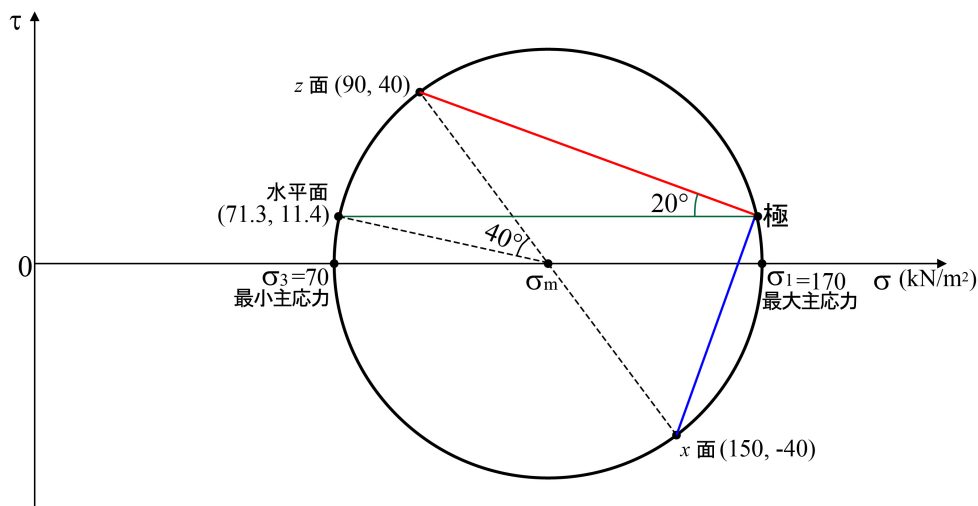
$$\sigma_x=150 \text{ kN/m}^2 \quad \sigma_z=90 \text{ kN/m}^2 \quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=40 \text{ kN/m}^2$$



- (1) 図の応力状態をモール円で表わせ。
- (2) モール円の極を(1)の円上に示せ。
- (3) 最大主応力，最小主応力の値を求めよ。
- (4) 水平面に作用する垂直応力とせん断応力の値を求め，極を利用してモール円上にその応力点を示せ。（ヒント：反時計回りなので， $\alpha=-20^\circ$ で計算）

解答例

- (1) x 面に作用するせん断応力は時計回りで負の値となるので，(150, -40)にプロット
 z 面に作用するせん断応力は反時計回りで正の値となるので，(90, 40)にプロット



※せん断応力の符号が逆の解答が多く見られた。「反時計回りの応力が正」を忘れないこと

- (2) (90, -40) の点を通り x 軸と平行な直線，または，
 (150, -40) の点を通り z 軸と平行な直線がそれぞれ円と交差する点が極となる。

(3)

モール円の中心：
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{150 + 90}{2} = 120 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

モール円の半径：
$$\tau_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{150 - 90}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

より，

$$\sigma_1 = \sigma_m + \tau_m = 120 + 50 = 170 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

$$\sigma_3 = \sigma_m - \tau_m = 120 - 50 = 70 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

(4) z 面を $\alpha=-20^\circ$ 回転させた面が水平面なので、その作用応力は、

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha \\ &= \frac{90+150}{2} + \frac{90-150}{2} \times \cos[2 \times (-20)] + 40 \times \sin[2 \times (-20)] = 71.3 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zx} \cos 2\alpha \\ &= \frac{90-150}{2} \times \sin[2 \times (-20)] + 40 \times \cos[2 \times (-20)] = 11.4 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

極から水平線を引いて、円と交差した点が上記の応力となる。

補足

(4) 応力テンソルの座標変換を利用した解法

$$\text{応力テンソル: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 150 & 40 \\ 40 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\text{変換行列: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(-20) & -\sin(-20) \\ \sin(-20) & \cos(-20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 20 & \sin 20 \\ -\sin 20 & \cos 20 \end{pmatrix}$$

図の座標系を反時計回りに 20° 回転させた X-Z 座標系の応力テンソルは、

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \mathbf{s} \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \cos 20 & \sin 20 \\ -\sin 20 & \cos 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 & 40 \\ 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 20 & -\sin 20 \\ \sin 20 & \cos 20 \end{pmatrix}$$

各要素を計算すると、

$$\sigma_x = 150 \cos^2 20 + 90 \sin^2 20 + 2 \times 40 \cos 20 \sin 20 = 168.7 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

$$\sigma_z = 150 \sin^2 20 + 90 \cos^2 20 - 2 \times 40 \cos 20 \sin 20 = 71.3 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -150 \cos 20 \sin 20 + 90 \cos 20 \sin 20 + 40 (\cos^2 20 - \sin^2 20) = 11.4 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

水平面 (Z 面) の応力値は、 $\sigma_z = 71.3 \text{ kN/m}^2$, $\tau_{zx} = 11.4 \text{ kN/m}^2$

(4) 行列の一次変換を援用し、

モール円の中心に対し、 (σ_z, τ_{zx}) の点を反時計回りに $2\alpha=40^\circ$ 回転させて求める解法

直行座標系の点 (x, y) を、原点周りに角 θ 回転 (反時計回り) させる一次変換は、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

点 (x, y) を、 (a, b) 点周りに角 θ 回転させる一次変換は、回転中心の移動を併用し、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

したがって、点 $(90, 40)$ をモール円中心 $(120, 0)$ 周りに 40° 回転させた水平面の応力は、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 40 & -\sin 40 \\ \sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90-120 \\ 40-0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -30 \cos 40 - 40 \sin 40 + 120 \\ -30 \sin 40 + 40 \cos 40 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71.3 \\ 11.4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$